

Videoanalýza matematického kyvadla

Vladimír Vochozka¹

e-mail: vochozka@kmt.zcu.cz

¹ Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Klatovská tř. 51, 306 19 Plzeň

Klíčová slova

Tracker, matematické kyvadlo, videoanalýza

1 Videoanalýza

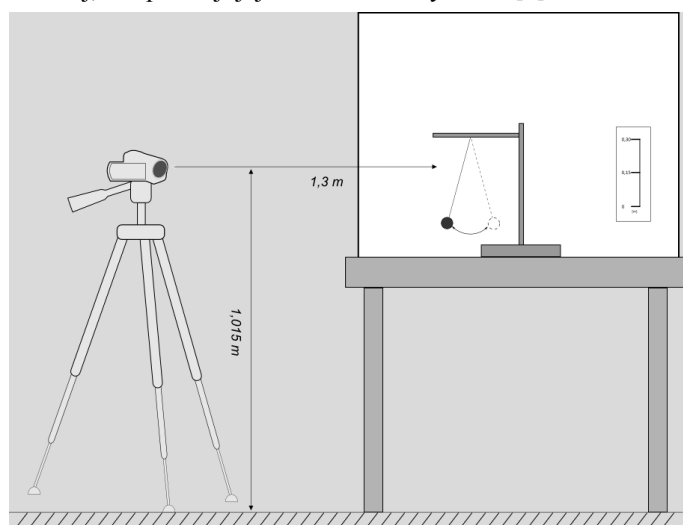
1.1 Úvod

Demonstrační a frontální pokusy jsou nepostradatelnou součástí výuky fyziky. Někdy je ovšem jejich provádění limitováno rozlišovací schopností pozorovatele. U některých experimentů nejsme schopni sledovat pohybující se děje s dostatečnou přesností nebo je pozorovat vůbec. Možností jak zpřesnit a zpřístupnit tyto experimenty je využití videoanalýzy.

1.2 Záznam experimentu

Videoanalýza se provádí pomocí záznamu z kamery, který se zpracovává ve speciálním softwaru. Experiment tedy probíhá beze změny, ovšem jeho analýza se provádí zpětně. Největší pozornost je potřeba věnovat záznamu průběhu zkoumaného děje. [1]

K pořízení nahrávky využíváme videokameru. Kamery mají různé parametry, které ovlivňují kvalitu nahraného záznamu. Pro videoanalýzu je nejdůležitějším parametrem vzorkovací frekvence, jak rychle je kamera schopná snímat obraz. Rychlost se udává v počtech snímků za vteřinu (FPS - Frames Per Second). Kamery nahrávají například podle standardu PAL či NTSC. Norma PAL udává 25 snímků za vteřinu a norma NTSC 30 snímků za vteřinu. Speciální vysokorychlostní kamery nabízí vyšší rychlosti, 80, 100, 200, 500, 1000 snímků za vteřinu. Čím větší rychlostí snímáme děj, tím přesněji jej dokážeme analyzovat. [2]



Obrázek 1 Návrh rozestavení kamery a experimentu

Sledovaný děj je třeba umístit před vhodné pozadí. Ideální je bílé pozadí osvětlené denním světlem, případně z více zdrojů světla.

Předmět pozorování je důležité dostatečně zvýraznit pro jeho lepší rozlišení s okolím. Doporučuje se použít barvu, která se jinde v záběru kamery neobjevuje a je tak snadno rozeznatelná a nezaměnitelná. Důvodem je, že software pro analýzu umožňuje automatické sledování určitého tvaru a barvy.

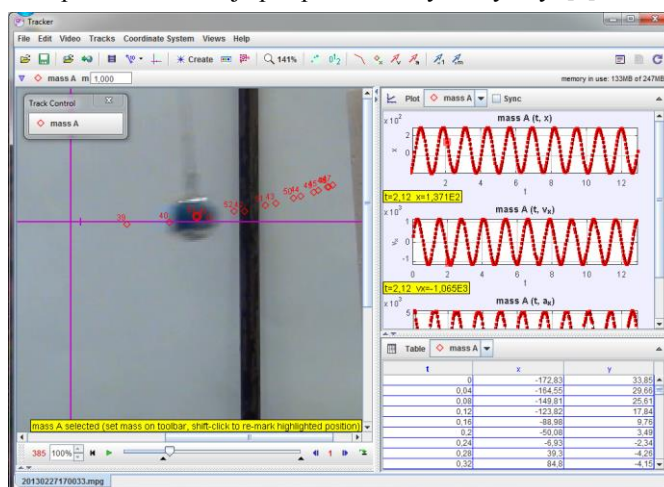
Aby program dokázal určit vzdálenosti v záznamu, je potřeba také zachytit objekt se známou velikostí pro zvolení měřítka. Měření je tím přesnější, čím delší kalibrační objekt je. [3]

Ideální je umístit kameru na stativ, abychom odstranili pohyb obrazu způsobený jejím držením v ruce. Čočku kamery necháme přímo směřovat na scénu experimentu ve stejné výšce. Vyhnete se tak zkreslení rozměrů (Obrázek 1).

Samozřejmě je pořízení více záznamů s dostatečnou rezervou záznamu před a po konci pozorovaného děje.

1.3 Software Tracker

Tracker je volně šiřitelný program pro videoanalýzu a modelování. Je projektem Open Source Physics (OSP) naprogramovaný v Javě. Jeho primární určení je pro použití ve výuce fyziky. [4]



Obrázek 2 Ukázka program Tracker

Parametry programu

aktuální verze	4.80
podporované jazyky	angličtina, francouzština, španělština, italština, němčina, řečtina, portugalština, slovenština, slovinština, švédština
operační systémy	Windows, Mac OS X, Linux
web programu	http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/
autor	Douglas Brown
licence	GNU GPL
velikost	26,4 MB

Tabulka 1 Základní informace o programu Tracker [5]

Sledování

Program umožňuje ručně nebo automaticky sledovat objekt ve videozáznamu. Zároveň dokáže automaticky zobrazovat rychlost, zrychlení a další informace. Graficky ukazuje vektory včetně jejich součtů. [5]

Modelování

Pomocí modelování je možné simulovat kinematické a dynamické modely jednoho hmotného bodu nebo dvou hmotných bodů. Modely jsou vytvářeny ve stejném měřítku jako je zdrojové video a je možné je srovnávat s reálnými hodnotami. [5]

Video

Program podporuje formáty videa: mov, avi, flv, mp4, wmv. Chyby v nahrávkách lze odstranit pomocí filtrů. Lze zvýšit jas, kontrast, zbavit se prokládání. U videa nahraného pod úhlem dovoluje upravit jeho perspektivu. Případně pokud je jako objektiv použito „rybí oko“, je možné toto video použít při úpravě filtrem. Zanalyzovaná videa lze vyexportovat i s popisem a vektory veličin. Případně lze zobrazit frekvenci videa a počet snímků. [5]

Tvorba dat a analýza

Souřadný systém může být pevně stanoven nebo měnit polohu svého počátku. Stejně tak je možné postupně měnit měřítko či sklon. Kalibrování rozměrů se provádí pomocí více metod: páska, tyč, body. Ve videu lze měřit úhly a vzdálenosti. Pro vytváření modelů je program neomezen množstvím proměnných. V grafech můžeme použít předvolené, vlastní nebo automatické křivky. Získaná data lze exportovat pro využití v jiných aplikacích. [5]

Digitální knihovna zdrojů

Vnitřní prohlížeč poskytuje možnost k přístupu online kolekcí videí, které již ostatní uživatelé vytvořili, nebo nahraní vlastních materiálů. [5]

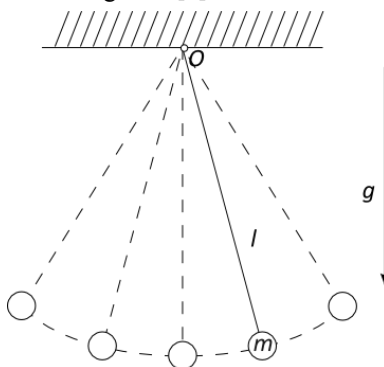
2 Matematické kyvadlo

2.1 Kyvadlo

Jako kyvadlo může být označené těleso, které je zavěšené mimo těžiště, volně otočné kolem pevné vodorovné osy. *Těleso* je jakýkoli hmotný předmět označující určitou část prostoru, která je nějakým způsobem ohraničena a která obsahuje látku. Těleso z pevné látky je pevné těleso. *Těžiště* je působiště tíhové síly působící na těleso. *Tíhová síla* je síla, která působí na těleso na povrchu Země. *Otáčení* je pohyb, při kterém se všechny body tělesa otáčejí kolem jedné společné osy se stejnou *úhlovou rychlostí*, ta vyjadřuje změnu dráhy v obloukové míře za jednotku času. Vodorovná osa se v kartézských souřadnicích obvykle označuje jako osa x a míří doprava. [6]

2.2 Matematické kyvadlo

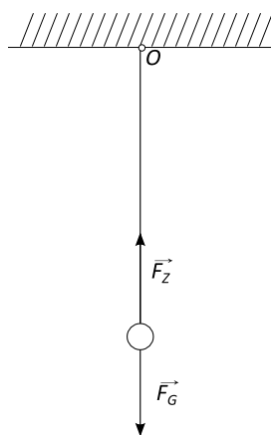
Těleso o hmotnosti m považujeme za hmotný bod, který je připevněn pevným vláknem, jehož délka je l . Hmotnost pevného vlákna a jeho deformaci tahem zanedbáváme, jeho druhý konec je zavěšen na ose otáčení O . Pokud uvedeme hmotný bod do pohybu, budeme zároveň zanedbávat odpor vzduchu při pohybu kyvadla i tření v závěsu a gravitační pole považujeme za homogenní. [7]



Obrázek 2 Pohyb matematického kyvadla

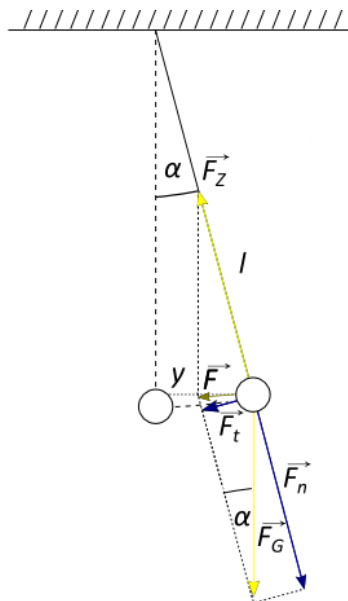
Hmotný bod zavěšený nad těžištěm, který se může volně otáčet kolem vodorovné osy, procházející bodem závěsu kolmo k rovině kmitání, považujeme za matematické kyvadlo.

Rovnovážná poloha je poloha tuhého tělesa, při níž je výslednice všech sil působících na těleso nulová a tedy výsledný moment všech sil je také nulový. V rovnovážné poloze na hmotný bod kyvadla působí tíhová síla F_G a tahová síla závěsu F_Z . [8]



Obrázek 3 Matematické kyvadlo v rovnovážné poloze

Pokud hmotný bod z rovnovážné polohy vychýlíme, vznikne složením sil F_G a F_Z výslednice sil F , která vrací těleso do rovnovážné polohy. Tečná síla F_t , ke které je kolmá síla normálová F_n , je shodná s tečnou složkou F_G a mění velikost rychlosti.



Obrázek 4 Matematické kyvadlo vychýlené z rovnovážné polohy [7]

Pokud kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy, začne konat kmitavý pohyb. Při malých výchylkách ($\pm 5^\circ$) je průběh kmitání kyvadla harmonickým a můžeme jej vyjádřit pomocí funkce *sinus*. Výchylku ve směru vodorovné osy y lze popsat pomocí rovnice harmonického kmitání

$$y = y_m \sin \omega t, \quad (1)$$

kde y_m je největší výchylka hmotného bodu z rovnovážné polohy neboli amplituda a ωt je fáze kmitání. Zrychlení harmonického kmitavého pohybu

$$a = \omega^2 y_m \sin \omega t, \quad (2)$$

můžeme upravit díky (1) na tvar

$$a = \omega^2 y, \quad (3)$$

kde ω je úhlová frekvence pohybu. Budeme řešit velikost tečné síly. Z obou pravoúhlých trojúhelníků vyjádříme $\sin \alpha$ jako:

$$\sin \alpha = \frac{y}{l}, \quad \sin \alpha = \frac{F_t}{F_G}. \quad (4)$$

Protože obě strany rovnic jsou totožné, dáme je do rovnosti

$$\frac{y}{l} = \frac{F_t}{F_G}, \quad (5)$$

ze které vyjádříme sílu F_t

$$F_t = \frac{F_G y}{l}. \quad (6)$$

Za F_t můžeme dosadit podle zákona síly $F = ma$ a za $F_G = mg$

$$ma = \frac{mgy}{l}. \quad (7)$$

Za zrychlení a dosadíme rovnici (3) a získáme tvar

$$m\omega^2 y = \frac{mgy}{l}, \quad (8)$$

který můžeme zjednodušit a upravit

$$\omega^2 = \frac{g}{l}; \text{ tedy } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (9)$$

Protože $\omega = \frac{2\pi}{T}$ po dosazení získáme vztah

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (10)$$

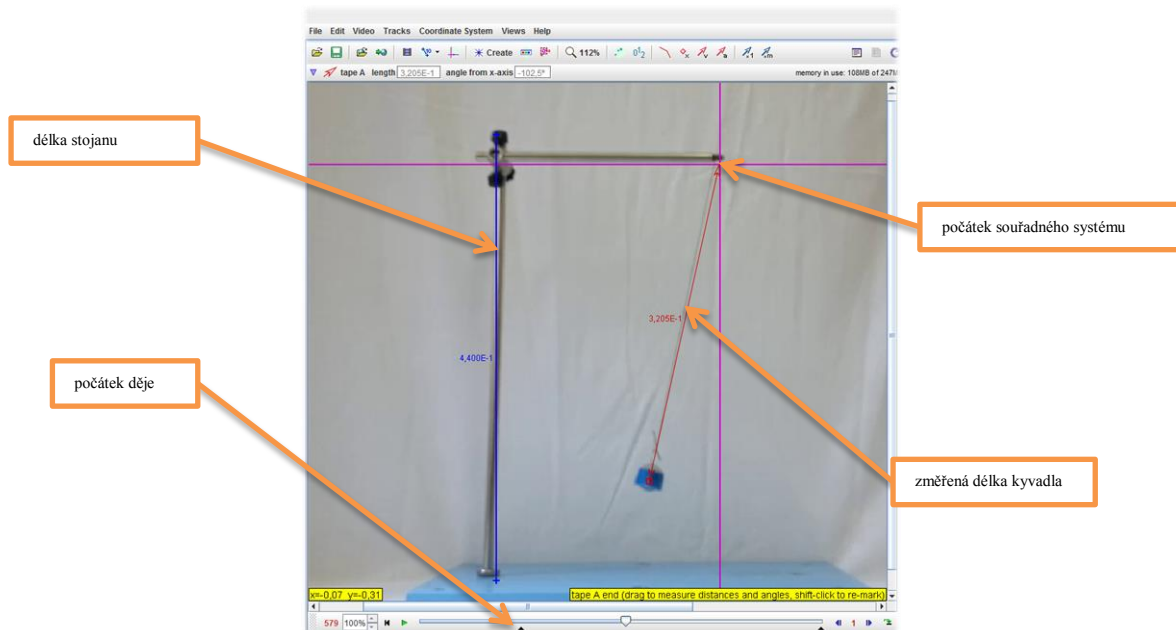
z kterého vyjádříme periodu T a dostaneme výsledný tvar

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (11)$$

3 Videoanalýza matematického kyvadla

3.1 Závislost délky periody na délce kyvadla

Pro ověření vztahu (11) provedeme měření šesti různých délek kyvadla. Ve videu zvolíme počátek souřadného systému, první snímek děje a podle známé délky stojanu zadáme měřítko. Pro ověření rozměrů použijeme měřicí nástroj a zkontrolujeme délku kyvadla.

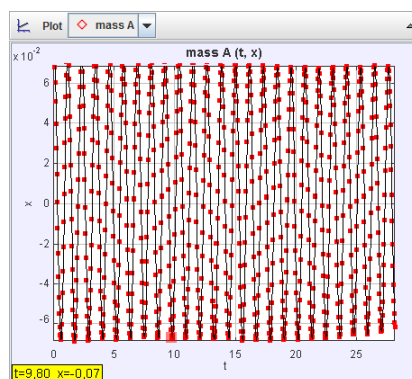


Obrázek 5 Nastavení v programu pro analyzovanou nahrávku

Vytvoříme hmotný bod, který necháme automaticky sledovat. Program podle zvoleného krokování sleduje polohu středu hmotného bodu. Získaná data ukládá do tabulky (Obrázek 6) a zároveň vykresluje graf závislosti (Obrázek 7), v našem případě změny polohy bodu na ose x na čase t .

t	x	y	a
0	0.08		
0.03	0.08	0.04	
0.07	0.08	0.07	1.71
0.1	0.07	0.13	2.02
0.13	0.07	0.2	1.86
0.17	0.06	0.26	1.66
0.2	0.05	0.31	1.46
0.23	0.04	0.35	1.1
0.27	0.03	0.38	0.78
0.3	0.01	0.4	0.78
0.33	0	0.4	0.57
0.37	-0.01	0.39	0.58
0.4	-0.02	0.37	0.93
0.43	-0.04	0.33	1.33
0.47	-0.05	0.28	1.61
0.5	-0.05	0.23	1.74
0.53	-0.06	0.17	1.94
0.57	-0.07	0.1	2.07
0.6	-0.07	0.03	2.11
0.63	-0.07	0.04	2.09
0.67	-0.07	0.11	2.03
0.7	-0.06	0.18	1.95
0.73	-0.05	0.24	1.82

Obrázek 6 Tabulka získaných hodnot včetně velikosti zrychlení a rychlosti hmotného bodu



Obrázek 7 Graf změny vzdálenosti v čase

Výsledky měření

Získaná data velikosti periody díky Trackeru porovnává Tabulka 2 s vypočtenými hodnotami podle rovnice (11). Hodnoty získané pomocí videoanalýzy se liší od vypočtených. Rozdíl tvoří omezení, které jsme stanovili na začátku při odvozování vztahu pro výpočet periody, zároveň rychlost snímání kamery a velikost krokování při automatickém sledování objektu.

	výpočet	Tracker
délka kyvadla l [m]	perioda T [s]	perioda T [s]
0,231	0,971	0,965
0,330	1,151	1,145
0,360	1,203	1,197
0,455	1,352	1,349
0,520	1,445	1,439
0,590	1,540	1,551

Tabulka 2 Porovnání naměřených a vypočtených period

4 Závěr

Videoanalýzu rychlých dějů, které nelze pozorovat samotným okem nebo s velkou přesností, lze vyřešit pomocí volně šiřitelného programu a dostupné techniky. Nahrání vlastního videozáznamu a následné řešení fyzikálního experimentu není omezené laboratoří a je možné ji provádět v domácích podmínkách.

Citace

- [1] HOCKICKO, Peter. Fyzikálna analýza reálných dejov využitím videozáznamov. *ZÁKLADY FYZIKY - elektronický materiál k videoanalýze fyzikálních dejov* [online]. 2011 [cit. 2013-02-27]. Dostupné z: <http://fyzika.utc.sk/sk/zaklady/publikacie/12.pdf>
- [2] Videoanalýza: Jakou kameru vybrat. Dartfish video software solutions [online]. 2009 [cit. 2013-02-27]. Dostupné z: <http://www.videoanalýza.cz/clanky/61-jakou-vybrat-videokameru>
- [3] KOUPIIL, Jan a Vladimír VÍCHA. FyzWeb články: Rychloběžné video ve škole. Fyzweb [online]. 2011 [cit. 2013-02-27]. Dostupné z: <http://fyzweb.cz/clanky/index.php?id=163>
- [4] HOCKICKO, Peter. Rozvoj manuálních zručností a intelektuálních schopností studentov použitím videoanalýzy pohybov. *Dartfish video software solutions* [online]. 2011 [cit. 2013-02-27]. Dostupné z: <http://fyzika.utc.sk/sk/zaklady/publikacie/3.pdf>
- [5] Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education. BROWN, Douglas. What is Tracker?: Tracker Features [online]. 2013 [cit. 2013-02-27]. Dostupné z: <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>
- [6] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. Encyklopedie fyziky: Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu. Projekt: Multimediální Encyklopedie Fyziky [online]. 2012 [cit. 2013-02-27]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/155-rychlost-a-zrychleni-kmitaveho-pohybu#>
- [7] BOCHNÍČEK, Zdeněk. Komentáře ke středoškolské učebnici fyziky: O. Lepil, Mechanické kmitání a vlnění. *Recenze středoškolských učebnic* [online]. 2006 [cit. 2013-02-27]. Dostupné z: <http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=196>
- [8] KUČEROVÁ, Barbora. *Matematické kyvadlo*. Brno, 2010. Dostupné z: http://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=28939. Bakalářská práce. VUT v Brně, Fakulta Strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce prof. RNDr. Jan Franců, CSc.
- [9] HALLIDAY, David. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. 1. vyd. Brno/Praha: VUTIUM/PROMETHEUS, 2000, 1198 s. ISBN 80-214-1869-9.